Элементарное введение в фильтры Калмана

О.М. Киселев
olegkiselev@matem.anrb.ru

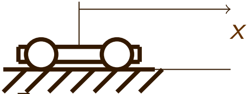
16 декабря 2019 г.

Одномерный фильтр Калмана

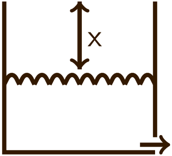
Движение робота вдоль стены. Двумерный фильтр Калмана

Одномерные физические модели

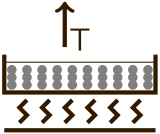
Процессы с изменением одного параметра.



Движение по прямой



уровень жидкости



нагрев

Универсальная модель – изменение одной координаты во времени – бусинка на стержне, движущаяся со скоростью v.

Детерминированная математическая модель

Математическая модель одномерного движения.

$$x(t) = x_0 + vt.$$

Дискретизация:

$$t \in \{t_i\}, \quad i \in \mathbb{Z} \quad \text{или} \quad i \in \mathbb{N}, \quad dt_i = t_{i+1} - t_i.$$

Скорость изменения координаты:

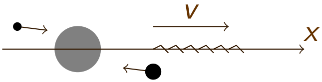
$$v = v_i, \quad t \in (t_i, t_{i+1}].$$

Дискретная детерминированная математическая модель:

$$\hat{x}_{i+1} = \hat{x}_i + v_i dt_i.$$

Стохастическая математическая модель

На движущуюся частицу могут воздействовать неучтенные случайные возмущения



Изменение координаты частицы из-за случайных воздействий на интервале времени $(t_i, t_{i+1}]$ обозначим ξ_i:

$$x_{i+1} = \hat{x}_{i+1} + \xi_{i+1}.$$

Математическая модель, содержащая случайную величину ξ_i, называется **стохастической**.
Проблема: В стохастической модели неизвестно истинное значение x_{i+1} из-за введения случайной величины ξ_i.

Измерение

Предположим, кроме математической модели есть датчик, который измеряет величину x в момент t_i.
На процесс измерения обычно влияет множество случайных факторов. Сумму влияния случайных факторов на измерение будем обозначать η_i. Это величина смещения истинного значения x_i. Результат измерения:

$$z_i = x_i + \eta_i.$$

Проблема: Результат измерения содержит случайную величину. Поэтому измерение не дает истинного значения измеряемой величины x_i.

Комбинация результатов измерения и математической модели

Известные данные:

- вычисленное значение на предыдущем интервале $\tilde{x}_i$;
- предсказание детерминированной математической модели:

$$\hat{x}_{i+1} = \tilde{x}_i + v_i dt_i;$$

- результат измерения z_{i+1}.

Приближенное значение координаты использует измерение и детерминированную математическую модель:

$$\tilde{x}_{i+1} = k_{i+1} z_{i+1} + (1 - k_{i+1}) \hat{x}_{i+1}.$$

Здесь k_i – коэффициент Калмана.

Предположения

Формула для оптимального значения коэффициента Калмана будет выведена при условиях:

- Систематические ошибки математической модели и систематические ошибки при измерении пренебрежимо малы.
- Случайные величины ξ_i и η_i имеют нормальные распределения плотности вероятности с известными значениями среднеквадратичных отклонений σ_ξ и σ_η соответственно.
- Случайные величины ξ_i и σ_i независимы друг от друга, то есть их корреляция равна нулю.

Оптимальное значение коэффициента Калмана

Коэффициент Калмана определяется из условия минимума среднеквадратичного отклонения величины $\tilde{x}_{i+1}$ на каждом шаге.

$$\sigma_0 = 0, \quad \tilde{x}_0 = x_0,$$

$$k_{i+1} = \frac{\sigma_i^2 + \sigma_\xi^2}{\sigma_i^2 + \sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2},$$

$$\tilde{x}_{i+1} = k_{i+1} z_{i+1} + (1 - k_{i+1}) \hat{x}_{i+1}$$

$$\sigma_{i+1}^2 = (1 - k_{i+1})^2 \sigma_i^2 + \sigma_\xi^2 - 2k_{i+1}\sigma_\xi^2 + k_{i+1}^2(\sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2)$$

Ограничения для использования формул

- Линейная зависимость координаты в точке $i+1$ от значения координаты в точке i математической модели.
- Систематические ошибки в матмодели и при измерении пренебрежимо малы.
- Случайные величины в математической модели ξ_i и при измерении η_i независимы друг от друга.
- Плотности вероятностей случайных величин нормально распределены и известны их среднеквадратичные отклонения.

Управление дрейфом частицы

- Задача: дрейф частицы с постоянной средней скоростью v_0.
- Управление: изменение текущей скорости частицы в моменты времени t_i.
- Модель:
    - в момент t_{i+1} ожидаемая координата $\hat{x}_{i+1} = \hat{x}_i + v_0 dt$;
    - в момент t_{i+1} согласно данным: $\hat{x}_{i+1} = \tilde{x}_i + v_{i+1} dt$;
    - скорость $v_{i+1} = \frac{1}{dt}(\hat{x}_i - \tilde{x}_i) + v_0$;
    - измерение $z_{i+1} = x_{i+1} + \eta_{i+1}$;
    - коэффициент Калмана: $k_{i+1} = \frac{\sigma_\xi^2}{\sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2}$;
    - значение координаты по по фильтру Калмана: $\tilde{x}_{i+1} = k_{i+1} z_{i+1} + (1 - k_{i+1})\hat{x}_{i+1}$.

Результат моделирования

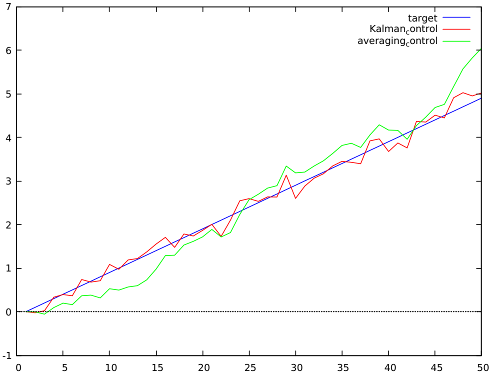


Рис. : Управление с использованием Калмановской фильтрации и с использованием скользящего среднего по трем последним измерениям. $\sigma_\xi = 0.2$, $\sigma_\eta = 0.02$. Цель управления – кривая $x = v_0 t$,где $v_0 = 0.1$.

Сравнение с управлением по скользящему среднему

Для управления дрейфом частицы вычислены суммы среднеквадратичных отклонений по 1000 реализаций управления по стохастической математической модели и по управлению с использованием скользящего среднего. Сумма среднеквадратичных отклонений при управлении по результатам калмановской фильтрации ~ 0.245, по скользящему среднему ~ 4.233.

Схема робота для движения вдоль стены

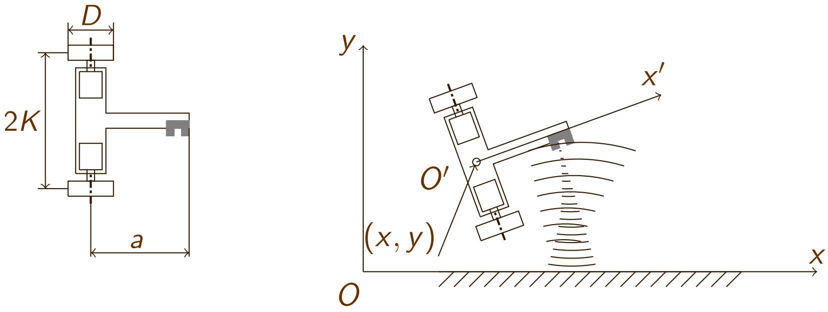


Рис. : Размеры робота: D – диаметр колес, $2K$ – колея, a – вынос датчика расстояния. Координаты робота: (x, y, α), здесь α– угол между осью Ox и осью (O', x').

Детерминированная математическая модель

Скорости вращения колес меняются в моменты времени t_n, где $t_{n+1} = t_n + dt$, dt – шаг дискретизации.
Для движения вдоль стены важна пара координат (y, α).
Координаты дискретной детерминированной модели $(\hat{y}_n, \hat{\alpha}_n)$:

$$
\begin{aligned}
\hat{\alpha}_{n+1} &= \alpha_n + \frac{D}{2K}\frac{\omega_R - \omega_L}{2}dt, \\
\hat{y}_{n+1} &= y_n - \frac{\omega_R + \omega_L}{\omega_R - \omega_L}K(\cos(\hat{\alpha}_{n+1}) - \cos(\alpha_n)).
\end{aligned} \tag{1}
$$

Стохастическая модель

Пусть:

- ξ – случайное отклонение по координате y.
- ζ – случайное отклонение по координате α.

Истинные координаты: (y_n, α_n).

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} &= \hat{\alpha}_n + \zeta_n, \\ y_{n+1} &= \hat{y}_{n+1} + \xi_n. \end{aligned} \tag{2}$$

Датчик расстояния

Робот имеет ультразвуковой датчик расстояния, вынесенный на расстояние a от оси ведущих колес в направлении оси (O', x').
Датчик измеряет расстояние до стены результат измерения u_n.
Расстояние от робота до стены:

$$z_n = u_n - a\sin(\alpha_n) + \eta_n. \tag{3}$$

Здесь η_n – случайная погрешность датчика.

Гироскоп

- Систематическая ошибка (дрейф) компенсирована при калибровке;
- Имеется процедура для определения α;
- Датчик гироскопа выдает значение угла со случайной ошибкой θ.

Значение угла поворота по датчику гироскопа:

$$\beta_n = \alpha_n + \theta_n.$$

Фильтр Калмана

- Истинные координаты робота (y, α) неизвестны.
- Для вычислений по детерминированной модели используются координаты, вычисленные с помощью фильтрации Калмана $(\tilde{y}_n, (\tilde{\alpha}_n)$:

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_{n+1} &= \tilde{\alpha}_n + \frac{D}{2K}\frac{\omega_R - \omega_L}{2}dt, \\ \hat{y}_{n+1} &= \tilde{y}_n - \frac{\omega_R + \omega_L}{\omega_R - \omega_L}K(\cos(\hat{\alpha}_{n+1}) - \cos(\tilde{\alpha}_n)).\end{aligned}$$

- Векторный коэффициент Калмана $\vec{k}_n = (k_n^y, k_n^\alpha)$.

$$\begin{aligned}\tilde{y}_{n+1} &= k_{n+1}^y z_{n+1} + (1 - k_{n+1}^y)\hat{y}_{n+1}, \\ \tilde{\alpha}_{n+1} &= k_{n+1}^\alpha \beta_{n+1} + (1 - k_{n+1}^\alpha)\hat{\alpha}_{n+1}.\end{aligned}$$

Предположения

- Случайные величины ξ, ζ, η, θ нормально распределены.
- Среднеквадратичные ошибки: $\sigma_\xi, \sigma_\zeta, \sigma_\eta, \sigma_\theta$.
- Попарные корреляции величин ξ, ζ, η, θ равны нулю.
- Величина α мала, так, что можно использовать линейное приближение:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha_n) &\sim \alpha_n, \\ \cos(\hat{\alpha}_{n+1}) - \cos(\tilde{\alpha}_n) &\sim -\sin((\hat{\alpha}_{n+1} + \tilde{\alpha}_n)/2)dt \\ &\sim -(\hat{\alpha}_{n+1} + \tilde{\alpha}_n)dt/2. \end{aligned}$$

Оптимальные значения

При сделанных предположениях оптимальные значения компонентов коэффициента Калмана:

$$k^y_{i+1} = \frac{\sigma^2_\xi + \sigma^2_{yi}}{\sigma^2_\xi + \sigma^2_\eta + a^2\sigma^2_\zeta + \sigma^2_{yi}}, \quad k^\alpha_{i+1} = \frac{\sigma^2_\zeta + \sigma^2_{\alpha i}}{\sigma^2_\theta + \sigma^2_\zeta + \sigma^2_{\alpha i}}.$$

Значение среднеквадратичных ошибок при оптимальных значениях компонентов коэффициента Калмана при $j = i + 1$:

$$\sigma^2_{yj} = k^2_{yj}\sigma^2_\eta + a^2 k^2_{yj}\sigma^2_\zeta + \left(k^2_{yj} - 2k_{yj} + 1\right)\left(\sigma^2_\xi + \sigma^2_{yi}\right),$$
$$\sigma^2_{\alpha j} = k^2_{\alpha j}\sigma^2_\theta + \left(k^2_{\alpha j} - 2k_{\alpha j} + 1\right)\left(\sigma^2_\zeta + \sigma^2_{\alpha i}\right).$$

Управление движением вдоль стены

Значения управляющих параметров на $(n+1)$-м шаге при условии $\hat{y}_{n+1} = 0$, $\hat{\alpha}_{n+1} = 0$:

$$\omega_R = -\frac{2\tilde{\alpha}_n}{Ddt}\left(K + \frac{\tilde{y}_n}{1-\cos(\tilde{\alpha}_n)}\right), \quad \omega_L = \frac{2\tilde{\alpha}_n}{Ddt}\left(K - \frac{\tilde{y}_n}{1-\cos(\tilde{\alpha}_n)}\right)$$

$$y_{n+1} = \xi_{n+1}, \quad \alpha_{n+1} = \zeta_{n+1}.$$

Показания датчиков расстояния и гироскопа:

$$z = y_{n+1} - a\alpha_{n+1} + \eta_{n+1}, \quad \beta_{n+1} = \alpha_{n+1} + \theta_{n+1}$$

Моделирование движения вдоль стены

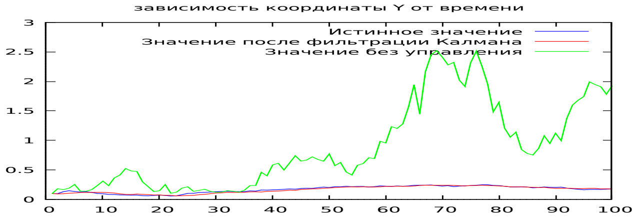


Рис. : Геометрические размеры робота $D = 0.05$, $K = 0.1$, $a = 0.15$. Начальные скорости $\omega_R = 1.001$, $\omega_L = 1$. Среднеквадратичные отклонения: $\sigma_\xi = 0.01$, $\sigma_\eta = 0.02$, $\sigma_\theta = 0.02$, $\sigma_\zeta = 0.01$. При превышении расчетных скоростей вращения колес $|\omega_{R,L}| > 1.5$ скорость вращения принималась равной ± 1.5. Знак совпадал со знаком вращения расчетного значения скорости.

Список литературы

- Е. С. Вентцель.
  Теория вероятностей.
  Наука, 1969.
- Браммер К. and Зиффлинг Г.
  Фильтр Калмана-Бьюси.
  Наука, 1982.
- Р.Л. Стратонович.
  Принципы адаптивного приема.
  Сов. Радио, 1973.