

# Элементарное введение в метод фильтрации Калмана

О.М. Киселев  
ok@ufanet.ru

16 июня 2020 г.

## 1 Одномерный фильтр Калмана

*В этом разделе вводится понятие детерминированной математической модели. Затем на примере математической модели одномерного движения броуновской частицы вводится стохастическая математическая модель. Предполагая, что имеется возможность не только вычислять движение частицы, но и определять ее положение по датчику, вводится фильтрация Калмана. Из условия минимума дисперсии на каждом шаге определяется оптимальное значение коэффициента Калмана.*

### 1.1 Детерминированная математическая модель

В классической механике и во многих разделах физики стандартные формулы, как правило, не включают в себя случайные величины. Это такие формулы, как зависимость пространственных координат от времени, формула для расчета количества выделения тепла в зависимости от силы тока и электрического напряжения и многие другие. Подобные формулы можно рассматривать как детерминированные, то есть *однозначно предопределённые*, математические модели процессов.

Например, формулы для координат материальной точки – это математические модели движения, формулы для изменения тепла – математические модели нагрева или охлаждения, формулы для изменения уровня топлива или заряда батареи – математические модели соответствующих процессов.

В самых простых моделях рассматривается изменение одного параметра моделируемого процесса, например, изменение расстояния, темпе-

ратуры или заряда. Такие математические модели аналогичны модели для движения бусинки, надетой на прямолинейный стержень. Бусинка может свободно перемещаться вдоль стержня без трения.

Если бусинка покоится, тогда координата бусинки постоянна, например, координата равна  $x_0$ . Математическая модель движения этой бусинки:

$$x = x_0,$$

То есть координата не меняется.

Бусинка может иметь заранее заданную постоянную скорость  $v$ , тогда математическая модель движения бусинки:

$$x(t) = x_0 + vt.$$

Понятно, что вместо координаты может быть температура, а вместо скорости – мощность (тепло), подводимое к системе в единицу времени, либо расход топлива (электрического заряда), либо другая измеряемая величина.

В математических моделях бывает удобно переходить от непрерывного изменения независимой координаты, например, времени, к дискретному. В таких случаях моменты времени нумеруются дополнительным индексом, например,  $t_i$ . Индекс  $i$  может быть из множества целых или множества натуральных чисел. Принято считать, что моменты времени ранжированы по номеру индекса  $t_{i-1} < t_i < t_{i+1}$ .

В дискретных моделях также принято нумеровать индексом и значение зависимой переменной. Часто математическая модель формулируются так, что значение зависимой координаты в момент времени  $t_{i+1}$  определяется, исходя из её значения в предыдущий момент времени  $t_i$ :

$$x_{i+1} = x_i + v_i dt_i.$$

Здесь  $v_i$  – скорость изменения координаты на отрезке времени от  $t_i$  до  $t_{i+1}$ , а  $dt_i = t_{i+1} - t_i$  – длина этого временного отрезка.

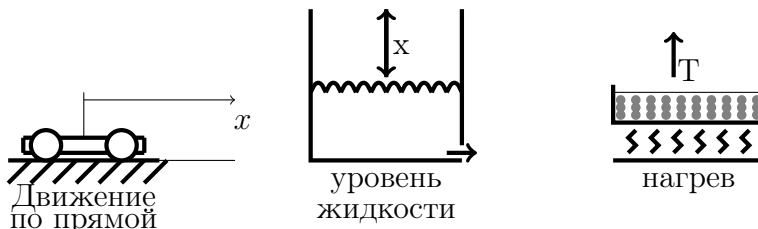


Рис. 1: Примеры простейших одномерных математических моделей.

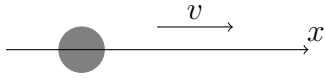


Рис. 2: Универсальный пример для одномерного движения – движение бусинки на спице без трения.

- Ниже, как правило, считается, что промежутки времени одинаковы между моментами  $t_{i+1}$  и  $t_i$  для всех значений индекса  $i$ . Поэтому они обозначаются  $dt_i = dt$ .
- Кроме того, считается, что такие промежутки достаточно малы, чтобы допустить, что скорость изменения координаты на них постоянна. Это допущение приводит к тому, что скорость может изменяться скачком, например,  $v_i \neq v_{i+1}$ . Конечно, это довольно грубое допущение, но во многих случаях математические модели с таким допущением оказываются вполне пригодны для использования.

## 1.2 Систематические и случайные погрешности модели

*Систематические ошибки* – это неучтенные в модели факторы, действующие постоянно и, в общем, предсказуемо. Обычно систематические ошибки возникают из-за упрощений.

Например, для предложенной выше модели движения бусинки, это неучтенное трение бусинки о стержень, возможный наклон стержня по отношению к горизонту, который может приводить к ускорению или замедлению движения. Если вместо бусинки на стержне рассматривать изменение количества тепла в системе при нагреве, то это потери тепла из-за недостаточной теплоизоляции. Если перейти к заряду батареи, то это возможные потери на нагрев батареи при зарядке. В каждом конкретном случае природа таких систематических ошибок разная. Однако, важно понимать, что систематические ошибки можно последовательно устранять, если переходить ко все более сложным математическим моделям.

Случайные ошибки возникают в результате действия непредсказуемых заранее факторов. Случайные погрешности при движении бусинки на стержне, это например, разная шероховатость стержня на разных участках, возможные неровности стержня, вибрации, возникающие из-за внешних факторов, наконец, если бусинка легкая - влияние движения окружающего воздуха. Похожие случайные факторы могут быть и при

нагреве, и при заряде батареи, и при движении роботизированной тележки, и при множестве других физических процессов.

Здесь важно понимать, что случайные ошибки нельзя устранить за счет усложнения детерминированной математической модели. При включении в модель влияния случайных величин модель становится недетерминированной. Обычно такие модели называют *стохастическими*.

### 1.3 Стохастическая математическая модель

Из-за неучтенных в детерминированной математической модели факторов координата  $x_{i+1}$  будет вычисляться с некоторыми ошибками. В результате действительные значения координаты бусинки окажутся неизвестными. Вместо них будут вычислены величины, которые оказываются более-менее близкими к истинным значениям.

Будем полагать, что систематические ошибки в математической модели не приводят к существенным изменениям в течение рассматриваемого промежутка времени. Поэтому систематическими ошибками будем пренебрегать.

Будем считать, что основной вклад в ошибки в детерминированной математической модели оказывает большое количество различных, не связанных между собой случайных факторов. Например, для движения тележки это неровности пути, некруглость колес тележки, неравномерность крутящего момента мотора и неравномерность вращения вала из-за свойств редуктора. Будем считать, что каждая из величин таких случайных погрешностей во-первых, мала, во-вторых, распределена равномерно. **Согласно центральной предельной теореме** суммарный вклад таких погрешностей  $\xi$  – *нормально распределенная случайная величина* с нулевым средним значением и некоторой *дисперсией*  $\sigma_\xi$ .

Наиболее простая и, что важно, универсальная математическая модель, которая включает в себя случайные воздействия такого рода – модель одномерного движения *броуновской частицы*. Неформально под такой частицей можно понимать очень легкую бусину на очень тонком прямолинейном стержне. Бусинка предполагается настолько легкой, что для ее движения оказываются чувствительны ее столкновения с мелкими частицами, пылью в воздухе или уж для совсем идеального случая – столкновения с быстрыми молекулами. Удары микроскопических частиц приводят к изменению скорости движения и, соответственно, координаты бусинки. Такие удары в нашей модели будем считать случайными.

Ниже для того, чтобы отойти от конкретного примера с бусинкой на стержне и подразумевать, что модель пригодна для широкого круга процессов, будем говорить про координату точки.

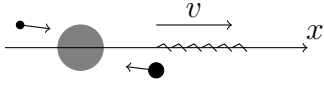


Рис. 3: Модель одномерного броуновского движения.

В результате истинная координата точки определяется формулой

$$x_{i+1} = \hat{x}_{i+1} + \xi_{i+1}. \quad (1)$$

Здесь  $\hat{x}_{i+1}$  – вычисленное значение координаты согласно детерминированной модели:

$$\hat{x}_{i+1} = x_i + v_i dt. \quad (2)$$

Предположим, что имеется датчик расстояния, с помощью которого можно определять координату точки. Датчик расстояния выдает величину  $z$ . Эта величина складывается из истинной координаты и случайной величины – ошибки измерения  $\eta$  – с нормальным распределением, нулевым средним и дисперсией  $\sigma_\eta$ :

$$z_{i+1} = x_{i+1} + \eta_{i+1}. \quad (3)$$

Таким образом получены две формулы, с помощью которых можно приближенно определить координату точки. Важно заметить, что случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  в этих формулах независимы друг от друга. То есть их *корреляция* равна нулю.

Так как ни та ни другая формула не дают точного значения координаты точки, то представляется разумным искать приближенное значение координаты, учитывая обе формулы:

$$\tilde{x}_{i+1} = k_{i+1} z_{i+1} + (1 - k_{i+1}) \hat{x}_{i+1}.$$

Здесь  $k_{i+1}$  – весовой коэффициент, определяющий «доверие» формуле для значения датчика расстояния и, соответственно,  $(k_{i+1} - 1)$  – «коэффициент доверия» для формулы, определяющей координату из детерминированной математической модели.

Формула для  $\tilde{x}_{i+1}$  называется *фильтром Калмана*, коэффициент  $k_{i+1}$  называется *коэффициентом Калмана*.

## 1.4 Вычисление оптимального значения коэффициента Калмана

Ниже используется стандартное обозначение для математического ожидания (*среднего значения*) некоторой случайной величины  $Y$

$$M[Y] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N Y_n.$$

Будем полагать, что начальное значение координаты, полученной из математической модели –  $\tilde{x}_1$  известно точно. Значение  $\tilde{x}_2$  вычислим по формуле:

$$\tilde{x}_2 = k_2 z_2 + (1 - k_2) \hat{x}_2.$$

В этой формуле две известные величины.

Во-первых, – это показание датчика:

$$z_2 = x_2 + \eta_2,$$

которое состоит из суммы истинного значения измеряемой величины  $x_2$  и случайной погрешности  $\eta_2$ .

Во-вторых, – значение, полученное из математической модели:

$$\hat{x}_2 = \tilde{x}_1 + v_1 dt,$$

где  $\tilde{x}_1$  – полученное ранее значение координаты. Здесь считается, что начальное значение координаты  $x_1$  известно точно и совпадает с  $\tilde{x}_1$ .

Наша задача – подобрать значение коэффициента  $k_2$  так, чтобы квадратичное отклонение величины  $\tilde{x}_2$  от неизвестного истинного значения  $x_2$  было минимально.

Для этого вычислим квадрат разности  $x_2 - \tilde{x}_2$ , воспользовавшись формулой для  $\tilde{x}_2$

$$(x_2 - \tilde{x}_2)^2 = (x_2 - (k_2 z_2 + (1 - k_2) \hat{x}_2))^2.$$

Подставим вместо  $z_2$  и  $\hat{x}_2$  их выражения, причем:

$$z_2 = x_2 + \eta_2 = (x_1 + v_1 dt + \xi_2) + \eta_2.$$

После подстановки, раскрытия скобок, и очевидных сокращений получим:

$$(x_2 - \tilde{x}_2)^2 = (\xi_2 - k_2 \xi_2 - k_2 \eta_2)^2 = (1 - k_2)^2 \xi_2^2 - 2k_2(1 - k_2) \xi_2 \eta_2 + k_2^2 \eta_2^2.$$

Теперь от полученного выражения вычислим среднее:

$$M[(1-k_2)^2 \xi_2 - 2k_2(1-k_2)\xi\eta + k_2^2 \eta_2^2] = (1-k_2)^2 M[\xi^2] + 2k_2(1-k_2)M[\xi\eta] + k_2^2 M[\eta_2^2].$$

Случайные величины в погрешности математической модели  $\xi_2$  и в погрешности датчика  $\eta_2$  считаются независимыми друг от друга, то есть *ковариация* равна нулю:

$$M[\xi\eta] = 0,$$

Тогда:

$$M[(x_2 - \tilde{x}_2)^2] = \sigma_\xi^2 - 2k_2\sigma_\xi^2 + k_2^2\sigma_\xi^2 + k_2^2\sigma_\eta^2,$$

где  $\sigma$  – *среднеквадратичное отклонение* соответствующей случайной величины:

$$\sigma_\xi^2 = M[\xi^2], \quad \sigma_\eta^2 = M[\eta^2].$$

Минимум квадратичного отклонения по параметру  $k_2$ , вычислив производную по  $k_2$  от правой части полученного выражения для  $M[(x_2 - \tilde{x}_2)^2]$ , и приравняв его нулю:

$$-\sigma_\xi^2 + k_2\sigma_\xi^2 + k_2\sigma_\eta^2 = 0.$$

Решение этого уравнения:

$$k_2 = \frac{\sigma_\xi^2}{\sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2}.$$

Полученное значение  $k_2$  – оптимальное значение коэффициента Калмана на первом шаге.

При этом значении  $k_2$  среднеквадратичное отклонение значения  $\tilde{x}_2$  от истинного  $x_2$ :

$$\sigma_2^2 = \sigma_\xi^2 \left( 1 - 2\frac{\sigma_\xi^2}{\sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2} + \frac{\sigma_\xi^4}{(\sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2)^2} \right) + \frac{\sigma_\xi^4}{(\sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2)^2} \sigma_\eta^2.$$

Пусть при некотором  $i$  известно измерение  $z_{i+1}$ , значение  $\tilde{x}_i$  и среднеквадратичное отклонение этой величины от истинного значения  $x_i$ . Тогда коэффициент Калмана минимизирует значение среднеквадратичного отклонения  $\tilde{x}_{i+1}$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{i+1}^2 &= M[(x_{i+1} - k_{i+1}z_{i+1} - (1 - k_{i+1})\hat{x}_{i+1})^2] = \\ &= M[((1 - k_{i+1})(x_i - \tilde{x}_i) + \xi_{i+1} - k_{i+1}(\xi_{i+1} + \eta_{i+1}))^2] = \\ &= (1 - k_{i+1})^2 \sigma_i^2 + \sigma_\xi^2 - 2k_{i+1}\sigma_\xi^2 + k_{i+1}^2(\sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2). \end{aligned}$$

Минимум этого среднеквадратичного отклонения достигается, если  $k_{i+1}$  удовлетворяет уравнению:

$$-(\sigma_i^2 + \sigma_\xi) + k_{i+1}(\sigma_i^2 + \sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2) = 0.$$

Откуда значение коэффициента Калмана на  $i + 1$  шаге:

$$k_{i+1} = \frac{\sigma_i^2 + \sigma_\xi}{\sigma_i^2 + \sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2}.$$

Это значение позволяет вычислить приближенное значение для координаты и среднеквадратичного отклонения на этом шаге:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{i+1} &= k_{i+1}z_{i+1} + (1 - k_{i+1})(\tilde{x}_i + v dt), \\ \sigma_{i+1}^2 &= (1 - k_{i+1})^2\sigma_i^2 + \sigma_\xi^2 - 2k_{i+1}\sigma_\xi^2 + k_{i+1}^2(\sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2). \end{aligned}$$

## 1.5 Численная реализация

При использовании вычислительных алгоритмов следует понимать, что они вместо стохастических процессов имеют дело только с конкретной реализацией таких процессов.

Понять различие между реализацией процесса и самим стохастическим процессом можно на простом примере опыта по подкидыванию монеты. Пока монета не подброшена или еще не упала, приходится рассматривать обе возможности – и то, что она упадет вверх орлом, и то, что она упадет вверх решкой. То есть приходится иметь дело со случайной величиной. После того как выпал орел или выпала решка, пропадает эффект случайности и появляется конкретная реализация случайной величины.

Важно понимать, что по одной и даже нескольким реализациям нельзя судить о свойствах стохастического процесса. Для получения общих закономерностей для *почти всех* всех реализаций необходимо изучить большое количество реализаций такого процесса.

Однако, часто считается, что реализованный в том или ином численном алгоритме процесс является в некотором роде типичным. В результате вместо исследования большого количества реализаций и получения интегральных средних оценок используют несколько случайно реализованных «типичных» процессов для иллюстрации. Именно такой псевдонаучный (то есть совсем не научный) подход использован в этом разделе. Приведены графики одной из реализаций стохастического процесса броуновского движения частицы с заданным дрейфом со скоростью  $v \neq 0$ .



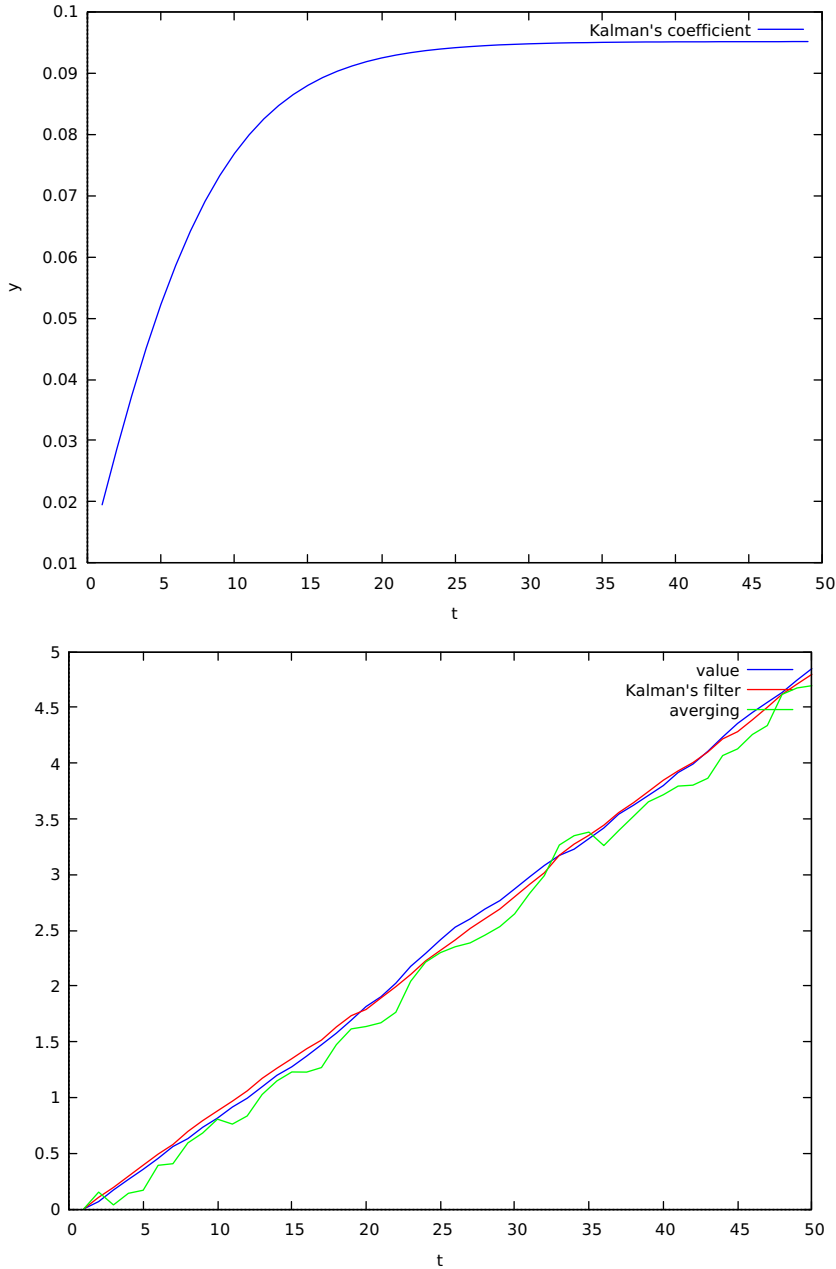


Рис. 4: «Типичные» графики для  $\sigma_{\xi} = 0.02$ ,  $\sigma_{\eta} = 0.2$ . На верхнем графике – зависимость значения коэффициента Калмана. На нижнем – кривые для одной из реализаций стохастического процесса – истинное значение координаты, значение, вычисленное с помощью фильтра Калмана, и значение, построенное как скользящее среднее трех последних измерений.

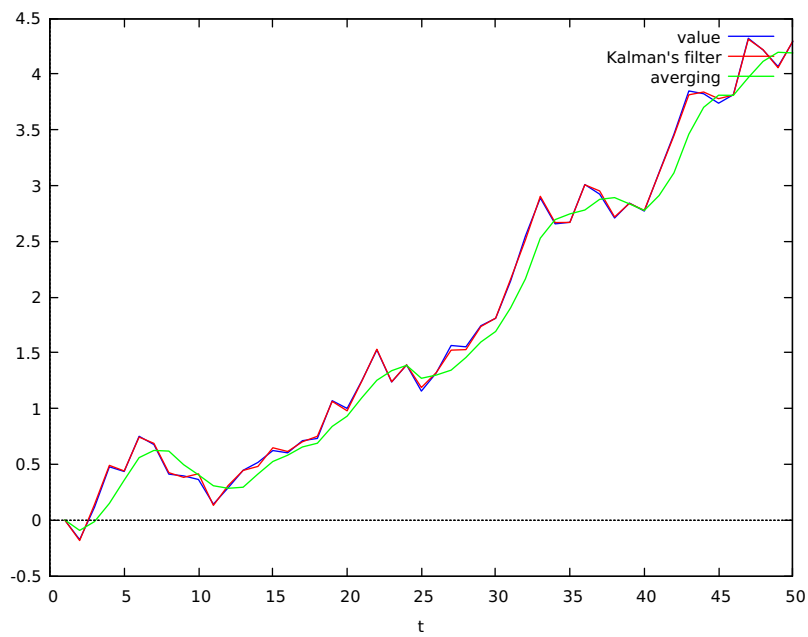
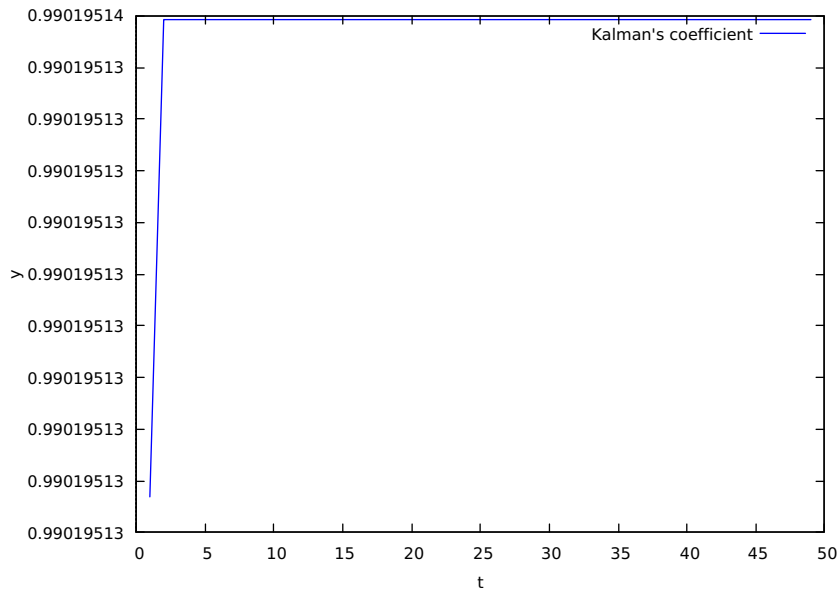


Рис. 5: «Типичные» графики для  $\sigma_\xi = 0.2$ ,  $\sigma_\eta = 0.02$ .

На рисунках 4 и 5 приведены графики реализаций стохастических процессов со значениями среднеквадратичных отклонений, отличающихся в 10 раз. Обработка результатов показывает, что коэффициент Калмана обеспечивает в обоих случаях лучшее приближение, чем скользящее среднее.

В частности на рисунке 4 на верхнем графике видно, что коэффициент Калмана стабилизируется в окрестности 0.1, то есть, больший вклад в приближенное значение, построенное с помощью фильтра, вносит детерминированная математическая модель, так как оценка квадратичного отклонения значений детерминированной модели в 10 раз меньше, чем для измерений с помощью датчика. На нижнем графике приведены кривые для одной из реализаций стохастического процесса – истинное значение координаты, значение, вычисленное с помощью фильтра Калмана, и значение, построенное как скользящее среднее трех последних измерений. Видно, что фильтр Калмана дает лучшее приближение. Действительно, для 1000 реализаций при этих значениях  $\sigma_\xi = 0.02$ ,  $\sigma_\eta = 0.2$  были вычислены средние значения сумм квадратов разностей между истинным значением и, фильтром Калмана и скользящим средним. Результат – отклонение для фильтра Калмана  $\sim 0.0162$ , для скользящего среднего  $\sim 0.115$ .

Графики на рисунке 5 построены при другом соотношении среднеквадратичных отклонений. На верхнем графике видно, что коэффициент Калмана стабилизируется в окрестности 0.99, то есть, больший вклад в приближенное значение, построенное с помощью фильтра вносит результат измерения, так как оценка квадратичного отклонения значений измерения датчиком в 10 раз меньше, чем для детерминированной математической модели. На нижнем графике приведены кривые, для одной из реализаций стохастического процесса – истинное значение координаты, значение, вычисленное с помощью фильтра Калмана и значение, построенное как скользящее среднее трех последних измерений. Видно, что фильтр Калмана и кривая истинного значения координаты почти совпадают. Действительно, для 1000 реализаций при этих значениях  $\sigma_\xi = 0.2$ ,  $\sigma_\eta = 0.02$  были вычислены средние значения сумм квадратов разностей между истинным значением и, фильтром Калмана и скользящим средним. Результат – отклонение для фильтра Калмана  $\sim 0.002$ , для скользящего среднего  $\sim 0.156$ .

## 1.6 Составляющие успеха фильтрации

Ниже перечислены основные свойства процесса для успешного применения фильтрации Калмана.

- Важнейшее свойство фильтра Калмана – наличие математической модели явления. Чем точнее математическая модель, тем лучше работает фильтр.
- Еще одно очень важное свойство – линейная зависимость координаты в точке  $i + 1$  от значения координаты в точке  $i$  математической модели. Свойство линейности приводит к тому, что среднеквадратичное отклонение для вычисляемого значения квадратично зависит от коэффициента Калмана. Минимальная точка квадратной параболы как раз дает оптимальное значение коэффициента на каждом шаге. Если бы зависимость  $i + 1$  значения координаты от  $i$ -го оказалась нелинейной, то поиск оптимального значения коэффициента Калмана при каждом значении  $i$  оказался бы существенно сложнее.
- При проведении вычислений использовалась независимость случайных величин для ошибок в математической модели и при измерении. Предположение об их независимости позволило легко получить удобную для анализа формулу среднеквадратичного отклонения.
- Было сделано предположение о нулевом среднем для случайных величин  $\xi$  и  $\eta$ .
- Предполагались известными среднеквадратичные отклонения случайных величин стохастической модели – значения  $\sigma_\xi$  и  $\sigma_\eta$ .

При построении фильтра Калмана для реальных систем перечисленные выше условия как правило оказываются выполненными лишь в некотором приближении. А именно:

- Линейная детерминированная математическая модель как правило является хорошим приближением в узком диапазоне значений независимой переменной. Такой диапазон часто существенно суживает область применения фильтра Калмана.
- Предположение о независимости случайных величин в стохастической модели либо не всегда оправдано, либо это предположение требует аккуратного дополнительного исследования об отсутствии корреляции между случайными величинами.
- Нулевое среднее ошибок часто предполагает отсутствие систематических составляющих в ошибках математической модели. Это

предположение требует достаточно точной модели, такой, чтобы неучтенные систематические ошибки не сказывались существенно в течение времени использования фильтра Калмана.

- Наконец, значения среднеквадратичных отклонений для ошибок детерминированной математической модели и для результатов измерений требуют экспериментальных подтверждений, либо квалифицированных оценок.

Перечисленные выше особенности применения фильтра Калмана часто являются барьером для применения фильтрации при управлении реальными системами, особенно в ситуации, когда достаточно использовать более простые алгоритмы для оценки состояния системы.

## 1.7 Управление дрейфом частицы

Здесь рассматривается управление скоростью изменения координаты. Пусть задача состоит в организации дрейфа частицы с постоянной средней скоростью  $v_0$ . Пусть есть возможность изменения текущей скорости частицы в моменты времени  $t_i$ . Тогда согласно требованию постоянной средней скорости в момент  $t_{i+1}$  частица должна находиться в точке с координатой  $\hat{x}_{i+1} = \hat{x}_i + v_0 dt$ . Согласно данным фильтра Калмана в момент  $t_i$  приближенная координата частицы  $\tilde{x}_i$ . Тогда для того, чтобы попасть в момент времени  $t_{i+1}$  в точку с координатой  $\hat{x}_{i+1}$  скорость  $v_{i+1}$  должна удовлетворять уравнению:

$$\hat{x}_i + v_0 dt = \tilde{y}_i + v_{i+1} dt.$$

Следовательно:

$$v_{i+1} = \frac{1}{dt}(\hat{x}_i - \tilde{x}_i) + v_0.$$

Теперь координата  $x_{i+1}$  вычисляется по формуле:

$$\hat{x}_{i+1} = x_i + v_{i+1} dt,$$

или

$$\hat{x}_{i+1} = x_i + (\hat{x}_i - \tilde{x}_i) + v_0 dt.$$

Эту формулу можно рассматривать как формулу для вычисления координаты по пропорциональному регулятору, в которой регулятор работает по отклонению  $(\hat{x}_i - \tilde{x}_i)$  с коэффициентом пропорциональности равным единице.

Истинное значение координаты  $x_i$  складывается из значения согласно детерминированной математической модели и случайной ошибки:

$$x_{i+1} = \hat{x}_{i+1} + \xi.$$

Тогда по формуле для фильтра Калмана:

$$\tilde{x}_{i+1} = k_{i+1}(x_{i+1} + \eta) + (1 - k_{i+1})\hat{x}_{i+1}.$$

Эту формулу можно переписать подробнее:

$$\tilde{x}_{i+1} = k_{i+1}((x_i - \tilde{x}_i) + \hat{x}_i + v_0 dt + \xi + \eta) + (1 - k_{i+1})((x_i - \tilde{x}_i) + \hat{x}_i + v_0 dt).$$

Вычислим среднеквадратичное отклонение:

$$\begin{aligned} M(x_{i+1} - \tilde{x}_{i+1})^2 &= M(x_i + (\hat{x}_i - \tilde{x}_i) + v_0 dt + \xi - \\ &\quad k_{i+1}(x_i - \tilde{x}_i + \hat{x}_i + v_0 dt + \xi + \eta) - \\ &\quad (1 - k_{i+1})(x_i - \tilde{x}_i + \hat{x}_i + v_0 dt))^2. \end{aligned}$$

Сокращение подобных слагаемых в скобках дает:

$$M(x_{i+1} - \tilde{x}_{i+1})^2 = M(\xi - k_{i+1}(\xi + \eta))^2 = \sigma_\xi^2 - 2k_{i+1}\sigma_\xi^2 + k_{i+1}^2(\sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2).$$

Минимум этого выражения по  $k_{i+1}$  достигается при

$$k_{i+1} = \frac{\sigma_\xi^2}{\sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2}.$$

На рисунке 6 представлены кривые для управления частицей по результату калмановского фильтрования и по пропорциональному регулятору, использующему отклонение от целевой средней скорости по результату вычисления скользящего среднего по трем предыдущим измерениям.

Кроме того вычислена суммы среднеквадратичных отклонений по 1000 реализаций управления по стохастической математической модели и по управлению с использованием скользящего среднего. Сумма среднеквадратичных отклонений при управлении по результатам калмановской фильтрации  $\sim 0.245$ , по скользящему среднему  $\sim 4.233$ .

## 2 Движение робота вдоль стены

### 2.1 Детерминированная математическая модель

Рассмотрим движение робота вдоль стены. Пусть координаты робота  $(x, y, \alpha)$ . Пусть скорость вращения левого и правого колес  $\omega_L$  и  $\omega_R$  соответственно. Предположим, что скорости вращения колес меняются в

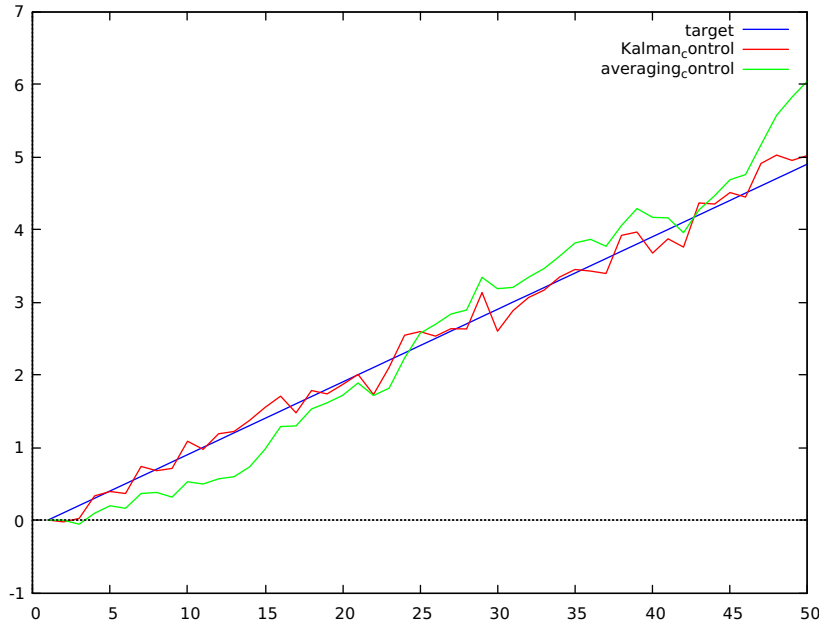


Рис. 6: На графике приведены результаты управления с использованием Калмановской фильтрации и с использованием скользящего среднего по трем последним измерениям.  $\sigma_\xi = 0.2$ ,  $\sigma_\eta = 0.02$ . Цель управления – кривая  $x = v_0 t$ , где  $v_0 = 0.1$ .

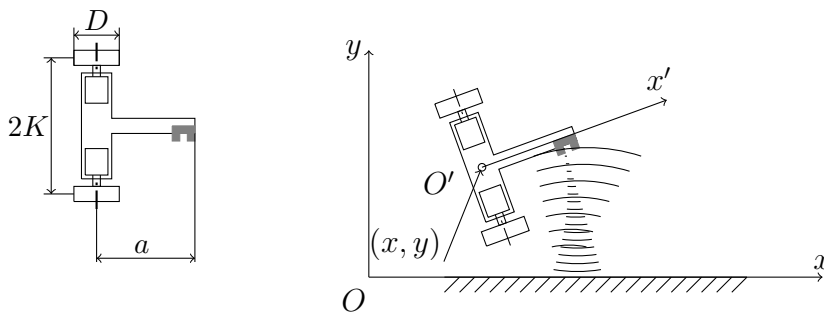


Рис. 7: На схеме слева указаны геометрические размеры робота:  $D$  – диаметр колес,  $2K$  – колея,  $a$  – вынос датчика расстояния. На схеме справа – подвижная система координат связанная с роботом – луч  $x'$ , неподвижная система координат  $(x, y)$ . Координаты робота – координаты  $(x, y, \alpha)$ , здесь  $\alpha$  – угол между осью  $Ox$  неподвижной системы координат и осью  $(O', x')$  подвижной системы координат, связанной с роботом.

дискретные моменты времени  $t_n$ , где  $t_{n+1} = t_n + dt$ ,  $dt$  – шаг дискретизации времени, тогда зависимость координат от номера  $n$ :

$$\begin{aligned}\alpha_{n+1} &= \alpha_n + \frac{D}{2K} \frac{\omega_R - \omega_L}{2} dt, \\ x_{n+1} &= x_n + \frac{\omega_R + \omega_L}{\omega_R - \omega_L} K (\sin(\alpha_{n+1}) - \sin(\alpha_n)), \\ y_{n+1} &= y_n - \frac{\omega_R + \omega_L}{\omega_R - \omega_L} K (\cos(\alpha_{n+1}) - \cos(\alpha_n)).\end{aligned}\quad (4)$$

## 2.2 Стохастическая математическая модель

Для построения стохастической математической модели удобно считать, что все случайные воздействия на координаты  $y_n, \alpha_n$  сведены в виде случайной погрешности  $\xi_n$  в формуле для координаты  $y_{n+1}$ :

$$\begin{aligned}\alpha_{n+1} &= \alpha_n + \frac{D}{4K} (\omega_R - \omega_L) dt, \\ \hat{y}_{n+1} &= y_n - \frac{\omega_R + \omega_L}{\omega_R - \omega_L} K (\cos(\alpha_{n+1}) - \cos(\alpha_n)), \\ y_{n+1} &= \hat{y}_{n+1} + \xi_n.\end{aligned}\quad (5)$$

Здесь результат вычисления по детерминированной математической модели обозначен как  $\hat{y}_{n+1}$ .

Дисперсия случайной величины  $\sigma_\xi$  существенно зависит от типа покрытия, по которому движется робот, от времени переключения между скоростью вращения моторов и множества других факторов.

Для экспериментальной оценки дисперсии случайной величины  $\sigma_\xi$  необходимо провести достаточно большое количество экспериментов с роботом на рабочей поверхности полигона. Здесь будем считать, что величина  $\sigma_\xi$  определена.

## 2.3 Свойства датчика расстояния

Будем считать, что робот имеет ультразвуковой датчик расстояния, вынесенный на расстояние  $a$  от оси ведущих колес в направлении оси  $(O', x')$ .

Из-за особенностей распространения звуковых волн будем считать, что датчик измеряет расстояние от датчика до стены. Если учесть вынос датчика и результат измерения  $u_n$ , тогда расстояние до стены можно представить в виде:

$$z_n = u_n - a \sin(\alpha_n) + \eta_n.\quad (6)$$

Здесь  $\eta_n$  – нормально распределенная случайная величина с дисперсией  $\sigma_\eta$ . Значение дисперсии зависит как от самого датчика, так и от



условий его работы – уровня и частот шумов на полигоне. Это значение можно оценить, смоделировав условия полигона и выполнив достаточно большое количество измерений.

## 2.4 Построение фильтра Калмана для движения робота вдоль стены

Отображение  $(x_n, y_n, \alpha_n) \rightarrow (x_{n+1}, y_{n+1}, \alpha_{n+1})$  нелинейно по параметру  $\alpha_n$ . Фильтрация Калмана предполагает математическую модель с линейной зависимостью от координат. Поэтому важно линеаризовать формулы (4).

Для линеаризации отображения (4) сделаем предположение, что все величины  $\alpha_n$  малы. Это предположение позволяет сделать замены:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha_{n+1}) - \sin(\alpha_n) &\sim \alpha_{n+1} - \alpha_n, \\ \cos(\alpha_{n+1}) - \cos(\alpha_n) &\sim \frac{1}{2}(\alpha_{n+1}^2 - \alpha_n^2) = \\ &\quad \frac{1}{2}(\alpha_{n+1} - \alpha_n)(\alpha_{n+1} + \alpha_n).\end{aligned}$$

Тогда формулы (4) можно заменить на их линейные приближения:

$$\begin{aligned}\alpha_{n+1} &= \alpha_n + \frac{D}{2K} \frac{\omega_R - \omega_L}{2} dt, \\ x_{n+1} &\sim x_n + \frac{\omega_R + \omega_L}{4} D dt, \\ y_{n+1} &\sim y_n - \frac{\omega_R + \omega_L}{8} \left( 2\alpha_n + \frac{D}{2K} \frac{\omega_R - \omega_L}{2} dt \right) D dt.\end{aligned}$$

Здесь удобно сделать еще одно предположение – промежуток  $dt$  – мал, так что можно отбросить слагаемое  $dt^2$ . В результате получится линеаризованное отображение:

$$\begin{aligned}\alpha_{n+1} &= \alpha_n + \frac{D}{2K} \frac{\omega_R - \omega_L}{2} dt, \\ x_{n+1} &\sim x_n + \frac{\omega_R + \omega_L}{4} D dt, \\ y_{n+1} &\sim y_n - \frac{\omega_R + \omega_L}{4} \alpha_n D dt.\end{aligned}\tag{7}$$

**Отображение (7) пригодно для малых значений  $\alpha_n$  и малых  $dt$ .**

При движении вдоль стены важно контролировать расстояние до стены – значение координаты  $y$ . Поэтому достаточно рассматривать отоб-



Рис. 8: Одна из реализаций фильтрации Калмана для движения вдоль стены по датчику расстояния. Геометрические размеры робота  $D = 0.05$ ,  $K = 0.1$ ,  $a = 0.15$ . Скорости вращения колес  $\omega_L = 1$ ,  $\omega_R = 1.01$ , шаг по времени  $dt = 0.1$ . Дисперсия  $\sigma_\xi = 0.1$ ,  $\sigma_\eta = 0.2$ . Начальные значения:  $y = 0$ ,  $\alpha = 0.01$ .

ражение двух переменных  $(y_n, \alpha_n) \rightarrow (y_{n+1}, \alpha_{n+1})$ :

$$\begin{aligned}\alpha_{n+1} &= \alpha_n + \frac{D}{4K}(\omega_R - \omega_L)dt, \\ y_{n+1} &\sim y_n - \frac{D}{4}(\omega_R + \omega_L)\alpha_n dt.\end{aligned}\quad (8)$$

Таким образом, линейная дискретная детерминированная математическая модель это отображение (8).

Если воспользоваться предположением о малых значениях величин  $\alpha_n$  и пренебречь слагаемыми высших порядков в разложении функции  $\sin(\alpha)$ :

$$\sin(\alpha) \sim \alpha_n,$$

тогда получим:

$$z_n \sim u_n - a\alpha_n + \eta_n.\quad (9)$$

Здесь оптимальные значения для коэффициента Калмана и значение для среднеквадратичного отклонения на каждом шаге вычисляются, исходя из приближенной линейной модели движения:

$$\begin{aligned}\alpha_{n+1} &= \alpha_n + \frac{D}{4K}(\omega_R - \omega_L)dt, \\ y_{n+1} &\sim y_n - \frac{D}{4}(\omega_R + \omega_L)\alpha_n dt + \xi_n, \\ z_{n+1} &\sim u_{n+1} - a\alpha_{n+1} + \eta_{n+1}.\end{aligned}\tag{10}$$

Пусть начальное значение координат  $y_1, \alpha_1$  известно точно. Тогда

$$k_2 = \frac{\sigma_\xi^2}{\sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2}.$$

Полученное значение  $k_2$  – оптимальное значение коэффициента Калмана на первом шаге.

Значение коэффициента Калмана на  $i + 1$  шаге:

$$k_{i+1} = \frac{\sigma_i^2 + \sigma_\xi}{\sigma_i^2 + \sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2}.\tag{11}$$

Это значение позволяет вычислить приближенное значение среднеквадратичного отклонения на этом шаге:

$$\sigma_{i+1}^2 = (1 - k_{i+1})^2 \sigma_i^2 + \sigma_\xi^2 - 2k_{i+1} \sigma_\xi^2 + k_{i+1}^2 (\sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2).\tag{12}$$

Пусть известны

- значение  $\alpha_n$ ;
- приближенное значение  $\tilde{y}_n$ ;
- показание датчика расстояния  $u_{n+1}$ .

Используя формулы (11) и (12), полученные для линейного приближения, можно вычислить приближенное значение координаты  $\tilde{y}_{n+1}$ :

$$\begin{aligned}\alpha_{n+1} &= \alpha_n + \frac{D}{2K} \frac{\omega_R - \omega_L}{2} dt, \\ \hat{y}_{n+1} &= \tilde{y}_n - \frac{\omega_R + \omega_L}{\omega_R - \omega_L} K (\cos(\alpha_{n+1}) - \cos(\alpha_n)), \\ z_{n+1} &= u_{n+1} - a \sin(\alpha_{n+1}); \\ \tilde{y}_{n+1} &= k_{n+1} (u_{n+1} - a \sin(\alpha_{n+1})) + (1 - k_{n+1}) \hat{y}_{n+1}.\end{aligned}$$

## 3 Многомерная фильтрация

Здесь рассмотрена фильтрация на примере движения робота вдоль стены при фильтрации данных двух датчиков – датчика гироскопа и датчика расстояния.

### 3.1 Датчик гироскопа

Датчик гироскопа определяет скорость изменения угла поворота. Обычно у датчика гироскопа есть дрейф – систематическая ошибка при определении скорости вращения. Будем считать, что такая ошибка компенсирована при калибровке датчика.

Кроме того предположим, что имеется надежная вычислительная процедура, которая интегрирует значения текущей скорости поворота, так, что на выходе выдается текущее значение угла направления робота  $\alpha$  по отношению к неподвижной системе координат  $xOy$ .

Положим, что датчик гироскопа выдает значение угла поворота со случайной ошибкой  $\theta$ , так, что при  $n$ -ом измерении получим величину  $\beta_n$

$$\beta_n = \alpha_n + \theta_n.$$

### 3.2 Двумерная стохастическая модель движения вдоль стены

В двумерной стохастической модели будем полагать, что наряду со случайной погрешностью математической модели для координаты  $y$ , есть и неучтенная случайная погрешность математической модели для определения угла. Эту случайную погрешность будем обозначать  $\zeta$ . Так что истинное значение направления движения робота в неподвижной системе координат, координата  $y$  и результаты измерений:

$$\begin{aligned}\alpha_{n+1} &= \alpha_n + \frac{D}{2K} \frac{\omega_R - \omega_L}{2} dt + \zeta_{n+1}, \\ y_{n+1} &= y_n - \frac{\omega_R + \omega_L}{\omega_R - \omega_L} K (\cos(\alpha_{n+1}) - \cos(\alpha_n)) + \xi_{n+1}, \\ \beta_{n+1} &= \alpha_{n+1} + \theta_{n+1}, \\ z_{n+1} &= u_{n+1} - a \sin(\alpha_{n+1}) + \eta_{n+1}.\end{aligned}\tag{13}$$

### 3.3 Оптимальный вектор Калмана

Для построения фильтра Калмана удобно выделить значения координат по детерминированной модели:

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_{n+1} &= \alpha_n + \frac{D}{2K} \frac{\omega_R - \omega_L}{2} dt, \\ \hat{y}_{n+1} &= y_n - \frac{\omega_R + \omega_L}{\omega_R - \omega_L} K (\cos(\alpha_{n+1}) - \cos(\alpha_n)).\end{aligned}$$

Вычисленные по правилу фильтрации координаты:

$$\begin{aligned}\tilde{y}_{n+1} &= k_{n+1}^y z_{n+1} + (1 - k_{n+1}^y) \hat{y}_{n+1}, \\ \tilde{\alpha}_{n+1} &= k_{n+1}^\alpha \beta_{n+1} + (1 - k_{n+1}^\alpha) \hat{\alpha}_{n+1}.\end{aligned}$$

Здесь используются компоненты вектора Калмана  $\vec{k} = (k^y, k^\alpha)$  на  $(n + 1)$ -м шаге.

Для получения оптимального значения вектора коэффициентов Калмана нужно сформулировать критерий оптимальности.

- Самый простой критерий оптимальности для движения робота вдоль стены – требование движения на заданном расстоянии до стены. Для такого движения необходимо оценивать значение координаты  $y$ . Поэтому критерий оптимальности – минимум дисперсии для разности между истинным значением координаты  $y$  и значением, вычисленным по правилу фильтрации:

$$S(k^y, k^\alpha) = M(y_{i+1} - \tilde{y}_{n+1})^2 \rightarrow \min. \quad (14)$$

- При движении вдоль стены бывает важно сохранять направление движения, например, параллельно стене. В этом случае в качестве критерия оптимальности можно выбрать минимум дисперсии между истинным значением угла направления и значением, вычисленным по правилу фильтрации:

$$S(k^y, k^\alpha) = M(\alpha_{i+1} - \tilde{\alpha}_{n+1})^2 \rightarrow \min. \quad (15)$$

- В общем виде критерий оптимизации можно представить в виде:

$$S(k^y, k^\alpha) = \kappa M(y_{i+1} - \tilde{y}_{n+1})^2 + (1 - \kappa) M(\alpha_{i+1} - \tilde{\alpha}_{n+1})^2 \rightarrow \min. \quad (16)$$

Изменяя значения параметра  $\kappa$  можно корректировать критерий оптимальности. При  $\kappa = 1$  получится оптимальность по дисперсии при определении расстояния до стены, при  $\kappa = 0$  получится оптимальность по дисперсии при определении направления движения.

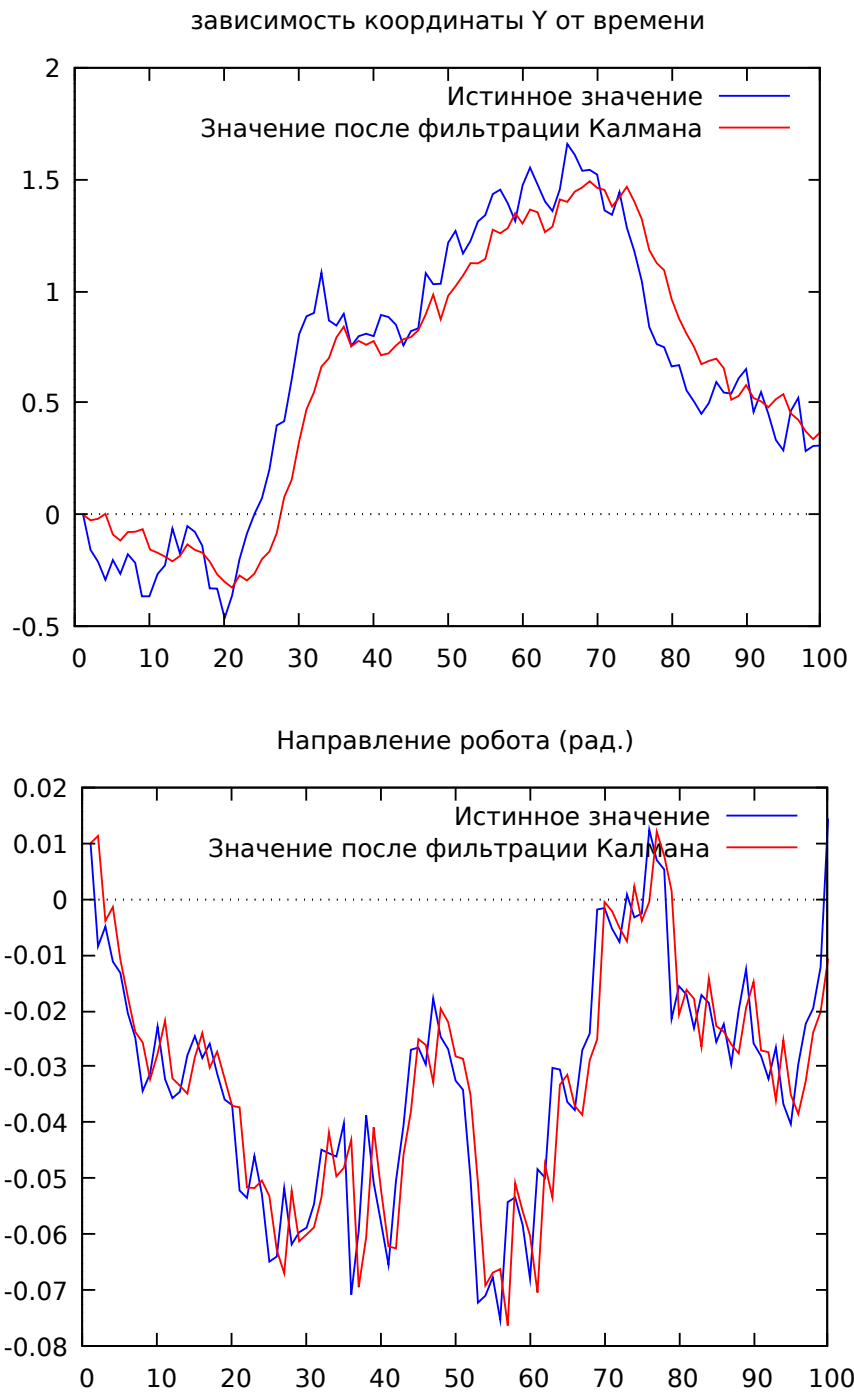


Рис. 9: Результаты фильтрации данных – расстояния  $y$  и направления робота  $\alpha$ . При  $\sigma_\xi = 0.1$ ,  $\sigma_\zeta = 0.01$ ,  $\sigma_\eta = 0.2$ ,  $\sigma_\theta = 0.05$ ,  $D = 0.05$ ,  $K = 0.1$ ,  $a = 0.15$ ,  $\omega_L = 1$ ,  $\omega_R = 1.01, dt = 0.1$ .

Для получения явных формул перейдем к линеаризованному виду формул (17) в предположении малых значений  $\alpha_n$  и малого значения  $dt$ :

$$\begin{aligned}
\alpha_{n+1} &= \alpha_n + \frac{D}{2K} \frac{\omega_R - \omega_L}{2} dt + \zeta_{n+1}. \\
y_{n+1} &\sim y_n - \frac{D}{4} (\omega_R + \omega_L) \alpha_n dt + \xi_n, \\
\beta_{n+1} &= \alpha_{n+1} + \theta_{n+1}, \\
z_{n+1} &= u_{n+1} - a\alpha_{n+1} + \eta_{n+1}.
\end{aligned} \tag{17}$$

Для получения оптимального вектора фильтра Калмана нужно получить выражение для дисперсии. Это выражение довольно громоздко. Поэтому вычисления удобно провести с помощью какой-либо системы компьютерной алгебры, например, свободно распространяемой программы МАХИМА.

Важно заметить, что выражение для  $S(k^y, k^\alpha)$  является квадратичной формой по отношению к компонентам вектора фильтра Калмана. Минимум этой квадратичной формы достигается в точке  $(k^y, k^\alpha)$  для которой выполнены условия экстремума:

$$\frac{\partial S(k^y, k^\alpha)}{\partial k^y} = 0, \quad \frac{\partial S(k^y, k^\alpha)}{\partial k^\alpha} = 0.$$

После подстановки в эти формулы выражения (16) получится система линейных уравнений относительно  $(k^y, k^\alpha)$ . Решение этой системы уравнений дает:

$$k_{i+1}^y = \frac{\sigma_\xi^2 + \sigma_{y_i}^2}{\sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2 + a^2\sigma_\zeta^2 + \sigma_{y_i}^2}, \quad k_{i+1}^\alpha = \frac{\sigma_\zeta^2 + \sigma_{\alpha_i}^2}{\sigma_\theta^2 + \sigma_\zeta^2 + \sigma_{\alpha_i}^2}.$$

В этой формуле  $\sigma_{y_i}$  и  $\sigma_{\alpha_i}$  – значения дисперсии, полученные для  $y_i$  и  $\alpha_i$  на  $i$ -м шаге. В вычислениях можно принять, что  $\sigma_{y_0} = 0$  и  $\sigma_{\alpha_0} = 0$ .

Значения  $\sigma_{y_j}$  и  $\sigma_{\alpha_j}$  для  $j = i + 1$  вычисляются по формулам:

$$\sigma_{y_j}^2 = M(y_j - \tilde{y}_j)^2, \quad \sigma_{\alpha_j}^2 = M(\alpha_j - \tilde{\alpha}_j)^2.$$

Явные выражения имеют вид:

$$\begin{aligned}
\sigma_{y_j}^2 &= k_{y_j}^2 \sigma_\eta^2 + a^2 k_{y_j}^2 \sigma_\zeta^2 + (k_{y_j}^2 - 2k_{y_j} + 1) (\sigma_\xi^2 + \sigma_{y_i}^2), \\
\sigma_{\alpha_j}^2 &= k_{\alpha_j}^2 \sigma_\theta^2 + (k_{\alpha_j}^2 - 2k_{\alpha_j} + 1) (\sigma_\zeta^2 + \sigma_{\alpha_i}^2).
\end{aligned}$$



Рис. 10: Моделирование движения вдоль стены. Геометрические размеры робота  $D = 0.05$ ,  $K = 0.1$ ,  $a = 0.15$ . Начальные скорости вращения колес  $\omega_R = 1.001$ ,  $\omega_L = 1$ . Среднеквадратичные отклонения:  $\sigma_\xi = 0.01$ ,  $\sigma_\eta = 0.02$ ,  $\sigma_\theta = 0.02$ ,  $\sigma_\zeta = 0.01$ . При превышении расчетных скоростей вращения колес  $|\omega_{R,L}| > 1.5$  скорость вращения принималась равной  $\pm 1.5$ . Знак совпадал со знаком вращения расчетного значения скорости.



### 3.4 Алгоритм системы управления и симуляция

При движении вдоль стены задача управления состоит в том, чтобы координата  $y$  равнялась нулю, направление робота  $\alpha$  также равнялось 0.

Пусть в некоторый момент  $t_n$  известны координаты робота после фильтрации:  $(\tilde{y}_n, \tilde{\alpha}_n)$ . Из задачи управления следует, что необходимо выбрать такие значения  $\omega_R, \omega_L$  при которых в следующий момент  $(\hat{y}_{n+1}, \hat{\alpha}_{n+1}) = (0, 0)$ .

Тогда для управляющих параметров  $\omega_R, \omega_L$  получится система уравнений:

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_n + \frac{Ddt}{4K}(\omega_R - \omega_L) &= 0, \\ \tilde{y}_n - \frac{\omega_R - \omega_L}{\omega_R + \omega_L} K(1 - \cos(\tilde{\alpha}_n)) &= 0.\end{aligned}$$

Отсюда получим:

$$\begin{aligned}\omega_R - \omega_L &= -\tilde{\alpha}_n \frac{4K}{Ddt}, \\ \omega_R + \omega_L &= -\frac{\tilde{y}_n}{1 - \cos(\tilde{\alpha}_n)} \frac{4\tilde{\alpha}_n}{Ddt}.\end{aligned}$$

Тогда значения управляющих параметров на  $(n + 1)$ -м шаге:

$$\omega_R = -\frac{2\tilde{\alpha}_n}{Ddt} \left( K + \frac{\tilde{y}_n}{1 - \cos(\tilde{\alpha}_n)} \right), \quad \omega_L = \frac{2\tilde{\alpha}_n}{Ddt} \left( K - \frac{\tilde{y}_n}{1 - \cos(\tilde{\alpha}_n)} \right).$$

При таком управлении движения вдоль стены истинные координаты на  $(n + 1)$ -м шаге :

$$y_{n+1} = \xi_{n+1}, \quad \alpha_{n+1} = \zeta_{n+1}.$$

Показания датчиков расстояния и гироскопа:

$$z = y_{n+1} - a\alpha_{n+1} + \eta_{n+1}, \quad \beta_{n+1} = \alpha_{n+1} + \theta_{n+1}$$

Компоненты вектора коэффициента Калмана:

$$k_{i+1}^y = \frac{\sigma_\xi^2 + \sigma_{y_i}^2}{\sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2 + a^2\sigma_\zeta^2 + \sigma_{y_i}^2}, \quad k_{i+1}^\alpha = \frac{\sigma_\zeta^2 + \sigma_{\alpha_i}^2}{\sigma_\theta^2 + \sigma_\zeta^2 + \sigma_{\alpha_i}^2}.$$

## 4 Список литературы

При фильтрации Калмана – с одной стороны можно вычислить координату наблюдаемого объекта с помощью математической модели, с другой стороны – координату можно определить из наблюдения. Как правило, результат наблюдения и результат вычислений не совпадают. Для получения наилучшего приближения используется метод наименьших квадратов. для среднеквадратичного отклонения.

Этот метод использовался для решение в частности, систем уравнений, когда число уравнений больше, чем число неизвестных. Пионерами в использовании метода наименьших квадратов в его современном виде считаются Гаусс и Лежандр.

Очевидно, что список литературы про метод наименьших квадратов и различные его варианты для обработки измерений со времен Гаусса и Лагранжа необозрим.

В качестве знакомства со специальной литературой про фильтр Калмана можно порекомендовать книгу [2]. Необходимые сведения из теории вероятностей и математической статистики можно получить из учебника [1]. С вариантами обобщения для нелинейных систем можно ознакомиться в монографии [3].

## Список литературы

- [1] Е. С. Вентцель. *Теория вероятностей*. Наука, 1969.
- [2] Браммер К. and Зиффлинг Г. *Фильтр Калмана-Бьюси*. Наука, 1982.
- [3] Р.Л. Стратонович. *Принципы адаптивного приема*. Сов. Радио, 1973.